Задача A. Борги

Відповідь — $a + b + c$ - d.

Задача B. Перші книжки

Оскільки ми маємо лише 5 елементів, то можна перебрати усі можливі перестановки. Один зі способів це зробити, прочитати масив, відсортувати його, та скористуватися функцією `next_permutation`.

Також, можна було помітити, що якщо відсортувати масив, тобто $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5$, то відповідь буде дорівнювати $a_5 + a_4 + a_3 - a_2 - a_1$. Можна це довести так, нехай $a_0 = 0$, тоді для перестановки b елементів a подивимось на формулу $\max(b_1 - b_0, 0) + \max(b_2 - b_1, 0) + \max(b_3 - b_2, 0) + \max(b_4 - b_3, 0) + \max(b_5 - b_4, 0)$. Нехай $b_6 = -\infty$, тоді нехай відсортована множина S буде містити індекси i, для яких $b_i > b_{i+1}$ та індекс 0. Можна переписати формулу з умови наступним чином:

$$\max(b_1 - b_0, 0) + \max(b_2 - b_1, 0) + \max(b_3 - b_2, 0) + \max(b_4 - b_3, 0) + \max(b_5 - b_4, 0) = \sum_{i=1}^{|S|}(b_{S_i} - b_{S_{i-1}})$$

Очевидно, що послідовність b розбилася на неспадаючі послідовності, де кожна така послідовність вносить max - min до загальної суми, де max і min — максимум та мінімум на неспадаючій послідовності. Тому, оптимальна перестановка має наступний вигляд: a_5, a_1, a_4, a_2, a_3.

Довівши це твердження ми розв'язали задачу в загальному випадку для довільного n, проте в даному контесті вас просили розв'язати її для $n = 5$.

Задача C. Бібліотека

Створимо масив $have$, для якого $have_i = 1$ якщо книга з номером i є в бібліотеці, і $have_i = 0$, якщо її нема. Будемо читати відвідувачів, якщо $t = 1$, то:

- Якщо $have_x = 0$, то додаємо 1 до відповіді
- Робимо $have_x = 0$, бо книжка з номером x в будь-якому випадку не буду в бібліотеці після цього відвідувачі

Інакше, якщо $t = 2$, то робимо $have_x = 1$.

Задача D. Книг. очікування

В цій задачі використовується доволі відома техніка, раджу її запам'ятати. Вона базується на тому, що в нас треба вибрати рівно k елементів, і рахунок вибраних елементів не залежить один від одного.

Давайте спочатку зробимо так, наче ми не обрали жодної книжки, тобто задоволення буде дорівнювати

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)$$

Як зміниться наше задоволення, після прочитання книжки з номером i? Від загального задоволення треба відняти задоволення від непрочитання книжки, і додати задоволення за її прочитання, тобто воно зміниться на

$$(b_i - a_i) - (a_i - b_i) = 2 \cdot (b_i - a_i)$$

Запишемо всі значення $2 \cdot (b_i - a_i)$ в вектор v, і після відсортуємо за незростанням. Відповідь буде дорівнювати

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) + \sum_{i=1}^{k} v_i$$

.

Щоб відновити номера книжок, які слід прочитати для досягнення максимального задоволення можна замість записування значення в вектор записувати пару значень $2 \cdot (b_i - a_i)$; i, і оптимальна множина книжок — це індекси перших k значень в відсортованому за незростанням векторі v.

Задача E. Оренда книжок

Розв'язок для $a_i = 1$:

При заданих обмеженнях, ми маємо відрізки $[t_i; t_i + l_i - 1]$ які всі дають однаковий рівень задоволення — 1. Можна застосувати жадібний алгоритм, щоб прочитати якомога більше книжок. Відсортуємо відрізки за зростанням правої границі. Будемо йти та брати книжку, якщо ми можемо її взяти. Це очевидно, бо якщо в тебе є декілька книжок, то навіщо тобі брати книжку, прочитання якої ти завершиш пізніше, ніж цієї, і залишиться менше доступних книжок.

Розв'язок на повний бал:

Нехай ans_i — відповідь, якщо після моменту часу i ми зупиняємось читати. Будемо йти по зростанню часу, далі будуть такі переходи:

- $ans_i = \max(ans_i, ans_{i-1})$ — ми можемо нічого не робити 1 момент часу
- Для всіх книжок, які мають $t = i$, зробимо перехід $ans_{i+l} = \max(ans_{i+l}, ans_i + a)$.

Книжки, які мають $t = i$ можна зберігати у векторі $books_t$, в якому будуть пари l, a.

Загальна асимптотика — $\mathcal{O}(N+t)$, де t — найпізніший момент часу, коли можна закінчити читати книжку.

Задача F. До чого доводять книжки...

Розв'язок для $n \leqslant 2000$:

Переберемо ліву границю за $\mathcal{O}(n)$ і для кожної лівої будемо перебирати праву границю за зростанням і підтримувати суму на відрізку. Загалом $\mathcal{O}(n^2)$.

Розв'язок для $a_i \leqslant a_{i+1}$:

Будемо йти з кінця масиву в початок та набирати елементи, доки вони збільшують суму, тобто, доки елемент додатній. Загалом $\mathcal{O}(n)$.

Розв'язок на повний бал:

Розпишемо формулу з умови для підвідрізка:

$$\sum_{i=1}^{|S|} a_{S_i} - |S| + 1 = a_{S_1} + a_{S_2} + \cdots + a_{S_{|S|}} - |S| + 1 = a_l + a_{l+1} + \cdots + a_{r-1} + a_r - (r - l + 1) + 1 =$$

$$(a_l - 1) + (a_{l+1} - 1) + \cdots + (a_{r-1} - 1) + (a_r - 1) + 1$$

Задача звелася до пошуку відрізка з максимальною сумою. Сума на відрізку $[l; r]$ може бути представлена як $sum_{[l,r]} = pref_r$ - $pref_{l-1}$, де $pref_i$ — сума перших i елементів масиву, і $pref_0 = 0$. Будемо перебирати праву границю, тобто, $pref_r$ в нас є фіксованим. Тобто, щоб максимізувати значення $pref_r$ - $pref_{l-1}$, треба знайти мінімальне значення $pref_{l-1}$. Підтримувавши значення мінімального $pref_i$ на префіксі, можемо знайти відрізок максимальної суми, який має праву границю в r. Відповідь на задачу — максимум серед всіх цих значень.

Загальна асимптотика — $\mathcal{O}(n)$.

Автор усіх задач: Андрій Столітній.