Паша також проти "хвостів"?

Автор задачі: **Павло Ціцей**
Задачу підготували: **Павло ціцей, Олександр Тимкович**
Розбір написав: **Павло Ціцей**

Рішення — потрібно зводити кожен елемент до медіани масиву. Тобто якщо медіана це x, то відповідь це $\sum_{i=1}^{n} |a_i - x|$.

Доказ:

Будемо вважати що масив a відсортований. Зафіксуємо якесь k і доведемо що якщо зводити елементи масиву до $x+k$, то відповідь буде більша або рівна за правильну. За припущенням, правильна відповідь $\sum_{i=1}^{n} |a_i - x|$.

Через те, що x — це медіана, ми можемо це переписати як

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x - a_i + \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n} a_i - x$$

Тепер запишемо відповідь для $x + k$.

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - x - k| = \sum_{i=1}^{y} x + k - a_i + \sum_{i=y+1}^{n} a_i - x - k$$

де y — це індекс останнього елементу, що менше або рівне за $x+k$. Якщо $k > 0$, то $y \geqslant \frac{n}{2}$ та віднявши 2 відповіді, ми отримаємо

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x - a_i + \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n} a_i - x - \sum_{i=1}^{y} x + k - a_i - \sum_{i=y+1}^{n} a_i - x - k =$$

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x - a_i - x - k + a_i + \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{y} a_i - x - x - k - a_i + \sum_{i=y+1}^{n} a_i - x - a_i + x + k =$$

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} -k + \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{y} -2 \cdot x - k + \sum_{i=y+1}^{n} k =$$

$$-k \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 \cdot x \cdot (y - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) - k \cdot (y - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + k \cdot (n - y) = -2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 \cdot k \cdot y + k \cdot n$$

Ми знаємо що $y \geqslant \frac{n}{2}$, тому $-2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leqslant 0$ and $-2 \cdot k \cdot y + k \cdot n \leqslant 0$, тому відповідь в цьому випадку більша або рівна. Для випадку коли $k < 0$ рішення симетричне.